

# Desarrollo de la Ecuación de Beltrami a partir de la Geometría de Cartan.

por

M. W. Evans y H. Eckardt,

Civil List, AIAS y UPITEC

([www.webarchive.org.uk](http://www.webarchive.org.uk), [www.aias.us](http://www.aias.us), [www.atomicprecision.com](http://www.atomicprecision.com), [www.upitec.org](http://www.upitec.org),  
[www.et3m.net](http://www.et3m.net))

Traducción: Alex Hill ([www.et3m.net](http://www.et3m.net))

## Resumen.

Se desarrolla la ecuación de Beltrami a partir de la identidad de Cartan, suponiendo que el monopolo magnético es igual a cero. Se demuestra que siempre hay soluciones longitudinales de la ecuación de Beltrami para el campo electromagnético libre, y se discuten algunas de estas soluciones en los contextos de la electrodinámica, hidrodinámica, magnetohidrodinámica y cosmología. Se demuestra que soluciones del tipo  $B^{(3)}$  siempre existen en el campo electromagnético libre. Por lo tanto, la masa del fotón nunca es idénticamente igual a cero y se refuta el modelo establecido de la física.

*Palabras clave:* ecuación de Beltrami, geometría de Cartan, masa del fotón. Componentes longitudinales del campo electromagnético libre.

## 1. Introducción.

En recientes documentos de esta serie [1 - 10] se ha demostrado que la conocida identidad de Cartan [11] se reduce a una sencilla identidad vectorial si se supone que no existe monopolio magnético en la naturaleza. También se ha demostrado que las densidades de corriente de carga eléctrica y magnética pueden construirse a partir de geometría de Cartan como parte de una teoría del campo unificado. En documentos previos de esta serie se ha demostrado que la ondas planas y el campo  $B^{(3)}$  del electromagnetismo en el espacio libre cumplen con las ecuaciones de Beltrami. Reed [12] ha llevado a cabo una reseña acerca de las diversas soluciones de la ecuación de Beltrami, y en la Sección 2 se demuestra que las soluciones del campo electromagnético libre son soluciones de Beltrami multiplicadas por un factor de fase. Esto significa que todos las soluciones de la ecuación de Beltrami cuya existencia se conoce [12] en campos tales como la hidrodinámica, la magnetohidrodinámica, la física del plasma y la cosmología también son soluciones para el campo electromagnético libre. Por lo tanto, resulta esencial desarrollar la ecuación de Beltrami como parte de una teoría del campo unificado en lugar de tan sólo afirmar su existencia a priori, lo cual ha sido la práctica típica hasta la fecha [12]. El desarrollo de esta ecuación se incluye en la primera parte de la Sección 2, la cual refiere a la amplitud de detalles incluida en las Notas de Acompañamiento de este documento, UFT257, publicadas en el portal [www.aiaa.us](http://www.aiaa.us). Como es habitual, las notas de acompañamiento o de antecedentes constituyen una parte intrínseca del resumen que se incluye en este documento. En la Sección 2 se incluye también una reseña de los contenidos de estas notas. En la Sección 3 se analizan y representan gráficamente los resultados obtenidos mediante cómputo, mostrando la naturaleza del flujo longitudinal en la electrodinámica de campo libre. La existencia de estas soluciones longitudinales refuta de inmediato el modelo establecido de la física, el cual afirma, erróneamente, que el campo libre electromagnético sólo posee componentes transversales.

## 2. Desarrollo de la Ecuación de Beltrami.

Se ha demostrado en trabajos recientes que la parte espacial de la conocida identidad de Cartan [11] puede expresarse como una identidad vectorial:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\omega}_b^a \times \underline{q}^b = \underline{q}^b \cdot \underline{\nabla} \times \underline{\omega}_c^a - \underline{\omega}_b^a \cdot \underline{\nabla} \times \underline{q}^b \quad (1)$$

donde  $q^a$  es el bien definido vector de la tétrada y  $\underline{\omega}_b^a$  es el vector de la conexión de espín. En ausencia de un monopolio magnético:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\omega}_b^a \times \underline{q}^b = 0 \quad (2)$$

de manera que:

$$\underline{q}^b \cdot \underline{\nabla} \times \underline{\omega}_b^a = \underline{\omega}_b^a \cdot \underline{\nabla} \times \underline{q}^b \quad (3)$$

Suponemos que el vector de conexión de espín es un dual del vector axial en su espacio índice a un tensor antisimétrico:

$$\underline{\omega}^a{}_b = \epsilon^a{}_{bc} \underline{\omega}^c \quad (4)$$

donde  $\epsilon^a{}_{bc}$  es el tensor unitario totalmente antisimétrico en tres dimensiones. Entonces la Ec. (3) se reduce a:

$$\underline{q}^b \cdot \underline{\nabla} \times \underline{\omega}^c = \underline{\omega}^c \cdot \underline{\nabla} \times \underline{q}^b \quad (5)$$

Un ejemplo de esto es:

$$\underline{A}^{(2)} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{\omega}^{(1)} = \underline{\omega}^{(1)} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{A}^{(2)} \quad (6)$$

en la base de circular compleja ((1), (2), (3)). El potencial vectorial se define a través de la hipótesis de la teoría ECE [1 - 10]:

$$\underline{A}^a = A^{(0)} \underline{q}^a \quad (7)$$

También se ha demostrado en trabajos recientes que la condición geométrica para la ausencia de un monopolo magnético es:

$$\underline{\omega}^a{}_b \cdot \underline{B}^b = \underline{A}^b \cdot \underline{R}^a(\text{espín}) \quad (8)$$

donde el vector de curvatura de espín se define mediante:

$$\underline{R}^a{}_b(\text{espín}) = \underline{\nabla} \times \underline{\omega}^a{}_b - \underline{\omega}^a{}_c \times \underline{\omega}^c{}_b \quad (9)$$

y donde  $\underline{B}^a$  es el vector de densidad de flujo magnético. Utilizando la Ec. (4):

$$\underline{R}^c(\text{espín}) = \underline{\nabla} \times \underline{\omega}^c - \underline{\omega}^b \times \underline{\omega}^a \quad (10)$$

La base circular compleja [1 - 10] se define mediante:

$$\underline{e}^{(1)} \times \underline{e}^{(2)} = i \underline{e}^{(3)*} \quad (11)$$

et cyclicum

y en esta base:

$$\underline{R}^{(1)}(\text{esp}i\omega) = \underline{\nabla} \times \underline{\omega}^{(1)} + i \underline{\omega}^{(3)} \times \underline{\omega}^{(1)}$$

$$\underline{R}^{(2)}(\text{esp}i\omega) = \underline{\nabla} \times \underline{\omega}^{(2)} + i \underline{\omega}^{(2)} \times \underline{\omega}^{(3)}$$

$$\underline{R}^{(3)}(\text{esp}i\omega) = \underline{\nabla} \times \underline{\omega}^{(3)} + i \underline{\omega}^{(1)} \times \underline{\omega}^{(2)} \quad (12)$$

Análogamente, los vectores de densidad de flujo magnético son:

$$\underline{D}^{(1)} = \underline{\nabla} \times \underline{A}^{(1)} + i \underline{\omega}^{(3)} \times \underline{A}^{(1)}$$

$$\underline{D}^{(2)} = \underline{\nabla} \times \underline{A}^{(2)} + i \underline{\omega}^{(2)} \times \underline{A}^{(3)}$$

$$\underline{D}^{(3)} = \underline{\nabla} \times \underline{A}^{(3)} + i \underline{\omega}^{(1)} \times \underline{A}^{(2)} \quad (13)$$

La Ec. (8) puede ejemplificarse mediante:

$$\underline{\omega}^{(1)} \cdot \underline{D}^{(2)} = \underline{A}^{(1)} \cdot \underline{R}^{(2)}(\text{esp}i\omega) \quad (14)$$

la cual puede desarrollarse como:

$$\begin{aligned} & \underline{\omega}^{(1)} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{A}^{(2)} + i \underline{\omega}^{(2)} \times \underline{A}^{(3)}) \\ &= \underline{A}^{(1)} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{\omega}^{(2)} + i \underline{\omega}^{(2)} \times \underline{\omega}^{(3)}) \end{aligned} \quad (15)$$

Soluciones posibles son:

$$\underline{\omega}^{(i)} = \pm \kappa \frac{\underline{A}^{(i)}}{\underline{A}^{(0)}} \quad i = 1, 2, 3 \quad (16)$$

Con el objeto de ser consistentes con la definición original de  $B^{(3)}$  [1 - 10] se selecciona el signo negativo de manera que:

$$\begin{aligned} \underline{D}^{(3)} &= \underline{\nabla} \times \underline{A}^{(3)} - i \frac{\kappa}{A^{(0)}} \underline{A}^{(1)} \times \underline{A}^{(2)} \\ \underline{D}^{(1)} &= \underline{\nabla} \times \underline{A}^{(1)} - i \frac{\kappa}{A^{(0)}} \underline{A}^{(3)} \times \underline{A}^{(1)} \\ \underline{D}^{(2)} &= \underline{\nabla} \times \underline{A}^{(2)} - i \frac{\kappa}{A^{(0)}} \underline{A}^{(2)} \times \underline{A}^{(3)} \end{aligned} \quad (17)$$

A partir de la Ec. (2):

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\omega}^{(3)} \times \underline{A}^{(1)} = 0 \quad (18)$$

y lo siguiente es una identidad del análisis vectorial:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{A}^{(1)} = 0. \quad (19)$$

Una posible solución de las Ecs. (18) y (19) es:

$$\underline{\nabla} \times \underline{A}^{(1)} = i \underline{\omega}^{(3)} \times \underline{A}^{(1)} = -i \frac{\kappa}{A^{(0)}} \underline{A}^{(3)} \times \underline{A}^{(1)}. \quad (20)$$

Análogamente:

$$\underline{\nabla} \times \underline{A}^{(2)} = i \underline{\omega}^{(2)} \times \underline{A}^{(2)} = -i \frac{\kappa}{A^{(0)}} \underline{A}^{(2)} \times \underline{A}^{(3)}. \quad (21)$$

Multiplicamos ahora ambos lados de las ecuaciones base (11.a) a (11.c) por  $A^{(0)2} e^{i\phi} e^{-i\phi}$ :

$$A^{(0)2} e^{i\phi} e^{-i\phi} \underline{e}^{(1)} \times \underline{e}^{(2)} = i A^{(0)2} e^{i\phi} e^{-i\phi} \underline{e}^{(3)} \underline{e}^{(3)*} \quad (22)$$

donde la fase electromagnética es:

$$\phi = \omega t - kZ \quad (23)$$

para hallar las ecuaciones cíclicas:

$$\underline{A}^{(1)} \times \underline{A}^{(2)} = i \underline{A}^{(3)} \underline{A}^{(3)*} \quad (24)$$

et cyclicum

donde:

$$\underline{A}^{(1)} = A^{(0)} \underline{e}^{(1)} e^{i\phi} = \frac{A^{(0)}}{\sqrt{2}} (i - ij) e^{i\phi} \quad (25)$$

$$\underline{A}^{(2)} = A^{(0)} \underline{e}^{(2)} e^{-i\phi} = \frac{A^{(0)}}{\sqrt{2}} (i + ij) e^{-i\phi}$$

$$\underline{A}^{(3)} = A^{(0)} \underline{e}^{(3)} = A^{(0)} \underline{k}$$

A partir de las Ecs. (20), (21) y (24):

$$\underline{\nabla} \times \underline{A}^{(1)} = k \underline{A}^{(1)} = -i k \frac{A^{(3)}}{A^{(0)}} \underline{A}^{(1)} \quad (26)$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{A}^{(2)} = k \underline{A}^{(2)} = -i k \frac{A^{(2)}}{A^{(0)}} \underline{A}^{(2)} \quad (27)$$

que son ecuaciones de Beltrami, QED. Las ecuaciones de Beltrami se han desarrollado a partir de primeros principios de la geometría.

En el documento precedente, UFT256, se utilizó un caso particular de estas soluciones:

$$\underline{\omega}^{(3)} = -\underline{k} / A^{(0)} \quad (28)$$

es decir,

$$\underline{\nabla} \times \underline{g}^{(1)} = -i k \underline{k} \times \underline{g}^{(1)} \quad (29)$$

Tal como se describió en la Nota 257(8), las ecuaciones de Beltrami (26) y (27), junto con las

ecuaciones de campo de la teoría ECE para el campo libre, produce las ecuaciones de Beltrami en  $\underline{E}$  y  $\underline{B}$  y ecuaciones cíclicas en  $\underline{B}$ , del Teorema Cíclico B [1 - 10].

Por lo tanto, el electromagnetismo de campo libre puede describirse mediante tres ecuaciones de Beltrami:

$$\underline{\nabla} \times \underline{A} = \kappa \underline{A}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \kappa \underline{B}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = \kappa \underline{E}$$

(30)

y éstas poseen una rica variedad de soluciones, tal y como incluye la reseña de Reed [12]. Algunas de estas soluciones se describen en detalle en las Notas 257(2) a 257(6). La Nota 257(3) reduce una de estas soluciones generales a soluciones de onda plana y soluciones de la ecuación de Proca para la masa del fotón. Desarrolla la ecuación de Helmholtz a partir de la ecuación de Beltrami, y define el factor de fase para una masa del fotón distinta de cero, implícita a través de la componente longitudinal de las soluciones de Beltrami para el campo electromagnético libre. Muestra que las soluciones generales son generalizaciones del Teorema Cíclico B. La Nota 257(4) describe soluciones generales en términos de ondas planas con polarización elíptica, y la Nota 257(5) describe soluciones generales para la ecuación de Beltrami en términos de las funciones de Bessel, demostrando que la componente longitudinal viene dada por la función de Bessel de orden cero y siempre coexiste con la solución transversa dada por la función de Bessel de primer orden.

Puede simplificarse el análisis anterior considerando sólo un componente de los dos componentes con jurados etiquetados como (1) y (2). Sin embargo, este procedimiento pierde información en general. Al considerar un componente, la Ec. (1) se simplifica a:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\omega} \times \underline{q} = \underline{q} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{\omega} - \underline{\omega} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{q}$$

(31)

y la suposición de un monopolio magnético igual a cero conduce a:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\omega} \times \underline{q} = 0$$

(32)

lo cual implica:

$$\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{q} = \underline{q} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{\omega}$$

(33)

Procediendo como en la Nota 257(7) conduce a:

$$\underline{\omega} \cdot \underline{\mathcal{B}} = \underline{A} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{\omega} \quad (34)$$

donde

$$\underline{R}(\text{espín}) = \underline{\nabla} \times \underline{\omega} \quad (35)$$

es la forma simplificada de la curvatura de espín. A partir de las Ecs. (33) y (34):

$$\underline{\omega} \cdot \underline{\mathcal{B}} = \underline{A} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{\omega} = \underline{\omega} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{A} \quad (36)$$

de manera que:

$$\underline{\mathcal{B}} = \underline{\nabla} \times \underline{A} \quad (37)$$

Sin embargo, en la teoría ECE [1 - 10]:

$$\underline{\mathcal{B}} = \underline{\nabla} \times \underline{A} - \underline{\omega} \times \underline{A} \quad (38)$$

de manera que las Ecs. (37) y (38) implican:

$$\underline{\omega} \times \underline{A} = \underline{0} \quad (39)$$

En este modelo simplificado, el vector de conexión de espín es paralelo al potencial vectorial. Estos resultados son consistentes con [1 - 10]:

$$\underline{P}^\mu = e A^\mu = \hbar K^\mu = \hbar \omega^\mu \quad (40)$$

a partir de la prescripción mínima. De manera que en este modelo simplificado:

$$\omega^\mu = (\omega_0, \underline{\omega}) = \frac{e}{\hbar} A^\mu = \frac{e}{\hbar} (A_0, \underline{A}) \quad (41)$$



Los fuerza del campo eléctrico  $E$  en voltios  $m^{-1}$  se define en este modelo simplificado mediante:

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - c\omega_0 \underline{A} + \phi \underline{\omega} \quad (42)$$

donde el potencial escalar es:

$$\phi = cA_0 \quad (43)$$

A partir de las Ecs. (42) y (41):

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \quad (44)$$

$$\underline{D} = \underline{\nabla} \times \underline{A} \quad (45)$$

que es lo mismo que la estructura dada por Heaviside, o sea la estructura utilizada en el modelo establecido, pero estas ecuaciones se han desarrollado a partir la relatividad general y geometría de Cartan, en tanto que la estructura de Heaviside es totalmente empírica. Sin embargo, las ecuaciones (31) a (45) están sobresimplificadas porque se desarrollan considerando sólo uno de los posibles complejos conjugados (1) y (2). Por lo tanto, se desarrollan utilizando álgebra real en lugar de álgebra compleja. Pierden el campo  $B^{(3)}$  así como la resonancia de conexión de espín, dos de los principales resultados de la teoría ECE. Es posible simplificar, pero debe cuidarse la no pérdida de información.

En el caso de interacción entre el campo y la materia, la fuerza del campo eléctrico se sustituye por el desplazamiento eléctrico  $\underline{D}$ , y la densidad de flujo magnético  $\underline{B}$  se sustituye por la fuerza del campo magnético  $\underline{H}$ :

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}; \quad \underline{H} = \frac{1}{\mu_0} (\underline{B} - \underline{M}) \quad (46)$$

donde  $\underline{P}$  es la polarización,  $\underline{M}$  es la magnetización,  $\epsilon_0$  es la permitividad en el vacío y  $\mu_0$  es la permeabilidad en el vacío. Se utilizaron unidades del S. I. Las cuatro ecuaciones de la electrodinámica para cada índice (1) ó (2) son:

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{D} &= \rho, & \underline{\nabla} \times \underline{H} &= \underline{J} + \frac{\partial \underline{P}}{\partial t}, \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{B} &= 0, & \underline{\nabla} \times \underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$

donde  $\rho$  es la densidad de carga y  $\underline{J}$  es la densidad de corriente.

La ecuación de Beltrami magnética:

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = K \underline{B} \quad (48)$$

sigue siendo válida, y es consistente con la ausencia de un monopolo magnético:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \quad (49)$$

porque:

$$\frac{1}{K} \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{B} = 0. \quad (50)$$

De manera que la ecuación de Beltrami (48) es una consecuencia de la ausencia de un monopolo magnético. En otras palabras, la solución de Beltrami siempre es una solución válida. A partir de las Ecs. (47) y (48):

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = K \underline{B} = \int \mu_0 \underline{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \quad (51)$$

y para la magnetostática o si la corriente de desplazamiento de Maxwell es pequeña:

$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{K} \underline{J} \quad (52)$$

y el campo magnético es directamente proporcional a la densidad de corriente. A partir de la Ec. (48):

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \frac{\mu_0}{K} \underline{\nabla} \times \underline{J} = K \underline{B} \quad (53)$$

de manera que:

$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{K^2} \underline{\nabla} \times \underline{J} \quad (54)$$

Las Ecs. (52) y (54) implican que la densidad de corriente debe poseer la estructura:

$$\underline{\nabla} \times \underline{J} = K \underline{J} \quad (55)$$

con el objeto de producir la ecuación de Beltrami (48) en magnetostática. La Ec. (52) sugiere que el chorro observado como emanando del plano de una galaxia en espiral podría deberse al campo  $B^{(3)}$  generado por una corriente  $J^{(3)}$ . Esta sugerencia requiere un mayor análisis.

Sin embargo, en la interacción entre campos en materia la ecuación eléctrica de Beltrami:

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = K \underline{E} \quad (56)$$

no es válida porque no es consistente con la ley de Coulomb:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \frac{f}{\epsilon_0} \quad (57)$$

A partir de las Ecs. (56) y (57):

$$\frac{1}{K} \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{E} = \frac{f}{\epsilon_0} \quad (58)$$

la cual viola la identidad vectorial:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{E} = 0. \quad (59)$$

La ecuación eléctrica de Beltrami sólo es válida para el campo electromagnético libre.

Finalmente, consideremos las cuatro ecuaciones del campo electromagnético libre:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0, \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 0, \quad (60)$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0 \quad (61)$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = 0 \quad (62)$$

para cada índice (1), (2) y (3) de la base circular compleja. Se obtiene a partir de las Ecs. (61) y (62) que:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \underline{E} \quad (63)$$

y:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \underline{B} \quad (64)$$

Las soluciones para la onda plana transversa son:

$$\underline{E} = \frac{E^{(0)}}{\sqrt{2}} (\underline{i} - i\underline{j}) e^{i\phi} \quad (65)$$

$$\underline{B} = \frac{B^{(0)}}{\sqrt{2}} (i\underline{i} + \underline{j}) e^{i\phi} \quad (66)$$

y:

donde

$$\phi = \omega t - kZ \quad (67)$$

y donde  $\omega$  es la frecuencia angular en el instante  $t$  y  $k$  es la magnitud del vector de onda en  $Z$ . detalles completos de este análisis se incluyen en la Nota 257(6).

A partir de análisis vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{B}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{B}) - \nabla^2 \underline{B} \quad (68)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{E}) - \nabla^2 \underline{E} \quad (69)$$

y para el campo libre las divergencias desaparecen, de manera que obtenemos las ecuaciones de onda de Helmholtz:

$$\nabla^2 \underline{B} + k^2 \underline{B} = 0 \quad (70)$$

y:

$$\nabla^2 \underline{E} + K^2 \underline{E} = \underline{0} \quad (71)$$

Estas son las ecuaciones trkalianas [12]:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{B}) = K \nabla \times \underline{B} = K^2 \underline{B} \quad (72)$$

y:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = K^2 \underline{E}. \quad (73)$$

De manera que soluciones para las ecuaciones de Beltrami también son soluciones para las ecuaciones de onda de Helmholtz. A partir de las Ecs. (63), (61) y (72):

$$-\nabla^2 \underline{B} - \frac{K}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \left( -\nabla^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{B} = \underline{0} \quad (74)$$

que es la ecuación de d'Alembert:

$$\square \underline{B} = \underline{0} \quad (75)$$

Para una masa del fotón finita, implícita mediante las soluciones longitudinales para el campo electromagnético libre:

$$\hbar^2 \omega^2 = c^2 \hbar^2 K^2 + m_0^2 c^4 \quad (76)$$

• en cuyo caso:

$$\left( \square + \left( \frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \right) \underline{B} = \underline{0} \quad (77)$$

que es la ecuación de Proca. Esto se dedujo por primera vez en la teoría ECE a partir del postulado de la tetrada de la geometría de Cartan [1 - 10].

A partir de las Ecs. (63) y (64):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times \underline{B} = -\omega^2 \nabla \times \underline{B} \quad (78)$$

y:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times \underline{E} = -\omega^2 \nabla \times \underline{E} \quad (79)$$

En general:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i\phi} = -\omega^2 e^{i\phi} \quad (80)$$

y:

$$e^{i\phi} = e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}} \quad (81)$$

de manera que la solución general para la ecuación de Beltrami:

$$\nabla \times \underline{B} = \mathbf{k} \underline{B} \quad (82)$$

También será una solución general para las ecuaciones (60) a (62) si la solución de Beltrami se multiplica por el factor de fase  $\exp(i\omega t)$ .

### 3. Análisis Numérico y Gráfico de las Soluciones de la Ecuación de Beltrami.

En esta sección estudiamos algunas soluciones de la ecuación de Beltrami intentamos llevar a cabo una conexión con la física. Kephart [13] introduce una solución bastante general, la cual podría dar algunas características acerca de la naturaleza de los campos de Beltrami. Este autor define un campo vectorial  $v$  mediante

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} T_3 \cos(TY) + T_2 \operatorname{sen}(TZ) \\ T_3 \operatorname{sen}(TX) + T_1 \cos(TZ) \\ T_2 \cos(TX) + T_1 \operatorname{sen}(TY) \end{bmatrix} \quad (83)$$

donde  $X, Y, Z$  son coordenadas espaciales y  $T, T_1, T_2, T_3$  son constantes. El rotacional de este campo es

$$\nabla \times \underline{v} = T \begin{bmatrix} T_1 (\cos(TY) + \operatorname{sen}(TZ)) \\ T_2 (\operatorname{sen}(TX) + \cos(TZ)) \\ T_3 (\cos(TX) + \operatorname{sen}(TY)) \end{bmatrix} \quad (84)$$

De manera que éstos un campo de Beltrami con

$$\nabla \times \underline{v} = T \underline{v} \quad (85)$$

si  $T_1 = T_2 = T_3$ . Proyecciones de este campo se incluyen en las Figs. 1 y 2 para el plano  $XY$  y para el plano  $Z$  plane, respectivamente. Uno puede observar que el campo oscila de un modo similar a un vórtice en las tres dimensiones espaciales. Esto también resulta obvio a partir de la Fig. 3, donde se representan gráficamente tres planos del campo para diferentes valores de  $Z$  en una representación tridimensional.

Según Kephart [13], puede hallarse una solución general mediante la definición de derivadas de funciones

$$v_x = \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial x}, \quad (86)$$

$$v_y = \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial y}, \quad (87)$$

$$v_z = \omega(x, y, z, t). \quad (88)$$

Iguando los componentes con el rotacional de  $v$  produce las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{\partial \omega}{\partial Y}, \quad (89)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial \omega}{\partial X}, \quad (90)$$

$$\omega = - \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right). \quad (91)$$

Hay varios errores tipográficos en el documento de Kephart; este resultado se obtuvo mediante álgebra computacional. Utilizando el ejemplo

$$\phi = A \cos(k_1 X) \sin(k_2 Y) \quad (92)$$

da

$$\omega = A (k_1^2 + k_2^2) \cos(k_1 X) \sin(k_2 Y) \quad (93)$$

y los eigenvalores del rotacional de  $v$  son

$$k_1^2 + k_2^2, \quad (94)$$

$$k_1^2 + k_2^2, \quad (95)$$

$$1. \quad (96)$$

Dado que los tres factores (o funciones en general) deben de ser iguales para cumplir con la condición de Beltrami, tenemos una restricción adicional

$$k_1^2 + k_2^2 \approx 1 \quad (97)$$

para que la Ec.(92) sea una función generadora de un campo de Beltrami. Reed [12] ha demostrado que el campo más general de Beltrami puede describirse mediante

$$\underline{v} = \kappa \nabla \times (\psi \underline{a}) + \underline{\nabla} \times \nabla \times (\psi \underline{a}) \quad (98)$$

donde  $\psi$  es una función arbitraria,  $\kappa$  es una constante y  $\underline{a}$  es un vector constante. Presentamos dos ejemplos. En primer lugar definimos

$$\psi = \frac{1}{L^3} XYZ \quad (99)$$



con

$$\underline{a} = [0, 0, 1]$$

(100)

El campo resultante (98) se representa gráficamente en la Fig. 4. El campo sólo posee componentes XY, y describe un vórtice hiperbólico. Sin embargo, la divergencias igual a cero. Un segundo ejemplo es

$$\phi = \text{sen}(kX) \text{sen}(kY) \cos(kZ)$$

(101)

el cual posee una estructura más complicada (Fig. 5). La proyección de varios niveles de Z en el plano XY puede observarse en la Fig. 6. Uno puede ver que los vectores colocan en la dirección Z.

Otro ejemplo importante, con relación a la física, se define a través de funciones de Bessel  $J_0$  y  $J_1$  en coordenadas cilíndricas:

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\phi \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_1(kr) \\ J_0(kr) \end{bmatrix}$$

(102)

A partir de la Fig. 7, puede observarse que el campo vectorial cambia, de transversal a longitudinal, cuando se aproxima al eje Z. Sin embargo, siempre hay también componentes longitudinales. Esto resulta obvio a partir de la Fig. 8, donde se representa gráficamente la descomposición en sus dos componentes. De acuerdo con la naturaleza oscilatoria de las funciones de Bessel, el campo se modifica periódicamente, de transversal a longitudinal, a medida que aumenta el radio. Puede obtenerse la mejor imagen del flujo de partículas de prueba en el campo (si se supone que el mismo es hidrodinámico) a partir de una imagen de las líneas de flujo (Fig.9). En el centro el flujo es veloz y longitudinal, mientras que en la periferia el flujo se torna circular y sólo posee una pequeña componente según el eje Z. Si observamos esta imagen desde arriba (Fig. 10) se observa cierta similitud con galaxias que presentan un chorro de masas en su centro. Esto se parece a una realización de un campo  $B^{(3)}$  a nivel cósmico.

Existe otra similitud llamativa con desarrollos técnicos llevados a cabo por Tesla. La Fig. 9 se parece a un transformador de Tesla, y las partes transversales en la Fig. 8 se asemejan a la distribución de corriente de una bobina plana de Tesla. La parte longitudinal en el centro corresponde a la corriente yendo hacia la esfera en un transmisor de Tesla; véase, por ejemplo, una patente de Tesla [14]. Tal como se obtuvo en la Sección 2 de este documento, sin duda tenemos ahora un método para la generación de campos electromagnéticos de Beltrami con componentes de campo longitudinales. Según la Ec.(55), la densidad de corriente para producir un campo de Beltrami consiste en un campo de Beltrami mismo:

$$\nabla \times \underline{J} = \kappa \underline{J}$$

(103)

Por lo tanto, debiera de ser posible transmitir campos libres de Beltrami mediante la construcción de un transmisor que tuviese una distribución de corriente como, por ejemplo, aquella señalada en la Fig. 9.

Una bobina plana es tan sólo una aproximación grosera, ya que en ella la densidad de corriente es constante y no depende del radio. Una mejora podría ser el empleo de anillos conductores concéntricos con corrientes que difieren entre sí. En el centro, podría imaginarse una estructura de tipo dipolo perpendicular a los anillos. Las dimensiones espaciales quedan determinadas por el número de onda que aparece en la Ec.(103) mediante la relación  $\kappa = 2\pi/\lambda$ . La longitud de onda  $\lambda$  se define a través de la frecuencia, la cual debiera de encontrarse en la región de la radiofrecuencia, de lo contrario será necesario tomar en cuenta la corriente de desplazamiento de la Ec.(51).

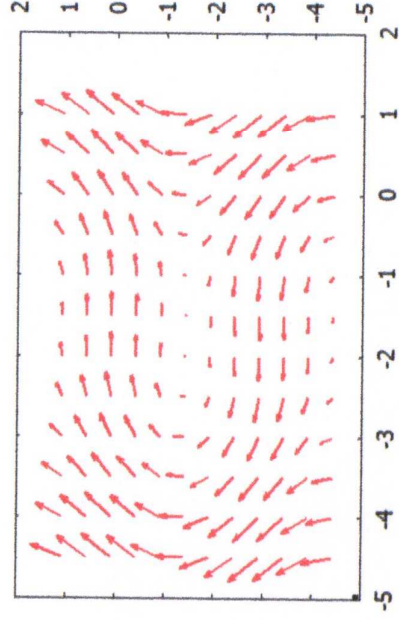


Figura 1: Campo de Beltrami de la Ec.(83), plano XY.

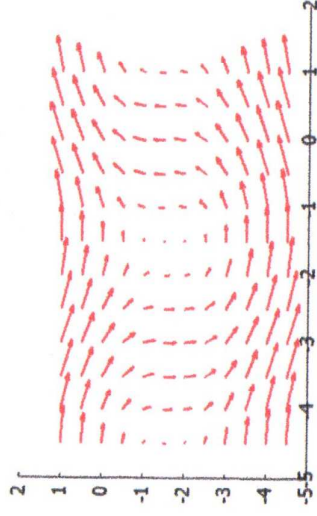


Figura 2: Campo de Beltrami de la Ec.(83), plano XZ.

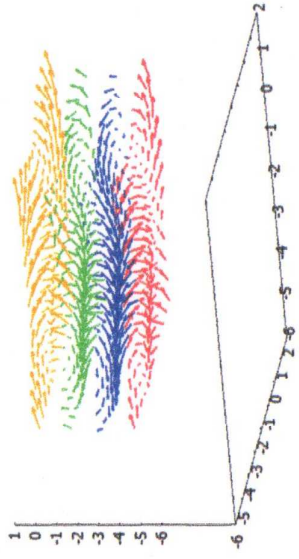


Figura 3: Campo de Beltrami de la Ec.(83) en tres planos del eje Z.

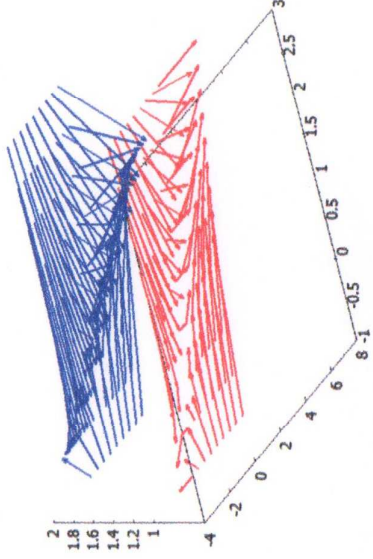


Figura 4: Campo general de Beltrami de las Ecs.(98, 99, 100).

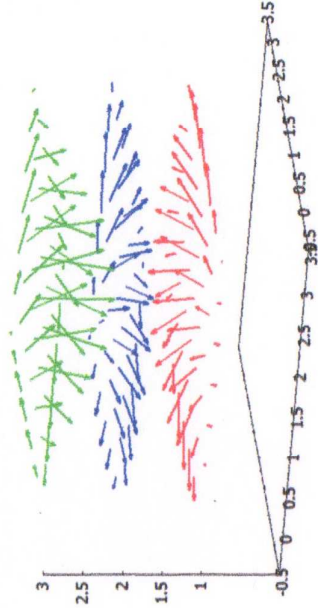


Figura 5: Campo general de Beltrami de las Ecs.(98, 100, 101).

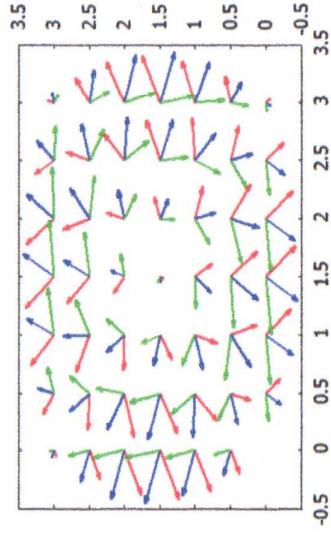


Figura 6: Campo general de Beltrami de las Ecs.(98, 100, 101), proyección en el plano XY.

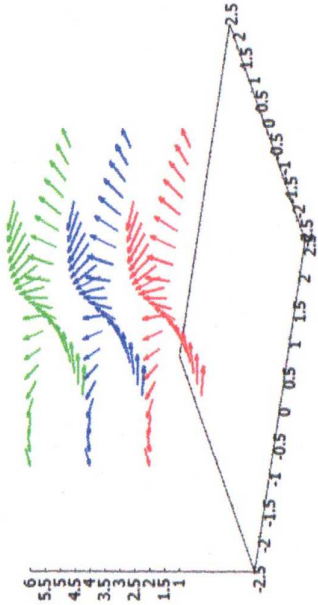


Figura 7: Campo de Beltrami de funciones de Bessel.

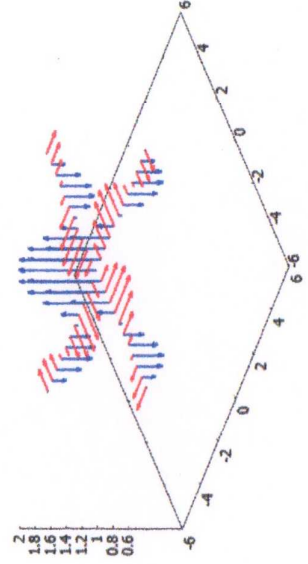


Figura 8: Campo de Beltrami de funciones de Bessel, descomposición en vectores transversales y longitudinales.

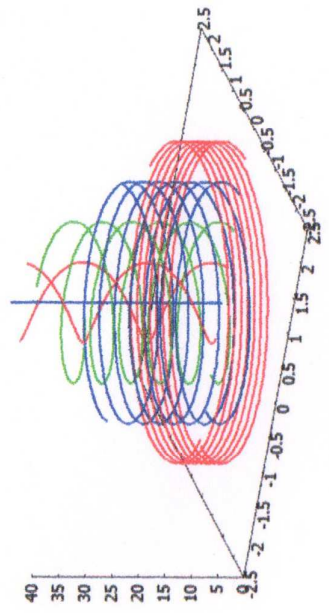


Figura 9: Campo de Beltrami de funciones de Bessel, líneas de flujo.

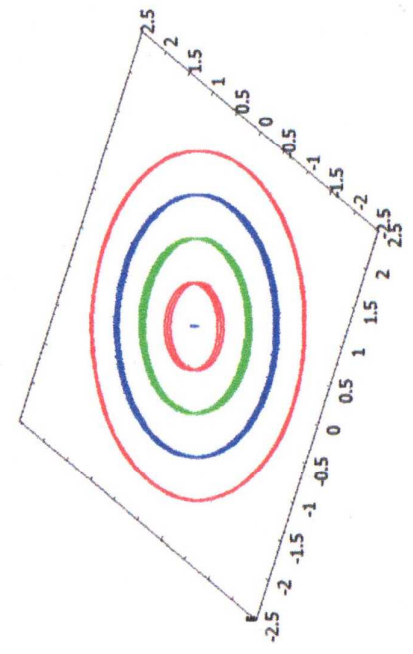


Figura 10: Campo de Beltrami de funciones de Bessel, líneas de flujo, vista superior.

## Agradecimientos.

Se agradece al Gobierno Británico por una Pensión Civil Vitalicia y a los colegas de AIAS y a otros por muchas discusiones interesantes. Se agradece a Norman Page por la sugerencia de que el chorro central de una galaxia en espiral podría ser una estructura B(3). Se agradece a Dave Burleigh por sus publicaciones en la red y a Alex Hill y a Robert Cheshire por las traducciones y las grabaciones.

## Referencias bibliográficas.

- [1] M. W. Evans, Ed. J. Found. Phys. Chem., (CISP, [www.cisp-publishing.com](http://www.cisp-publishing.com), 2011 en adelante).
- [2] M. W. Evans, "Definitive Refutations of the Einsteinian General Relativity", número especial de la ref. (1), 2012.
- [3] M. W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, "Criticisms of the Einstein Field Equation" (CISP, 2011).
- [4] D. W. Lindstrom, H. Eckardt y M. W. Evans, "ECE Theory for Engineers", en prep.
- [5] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis, 2005 a 2011) en siete volúmenes.
- [6] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis, 2007, traducido al castellano por y publicado en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us)).
- [7] M. W. Evans y S. Kielich, Eds., "Modern Nonlinear Optics" (Wiley, Nueva York, 1992, 1993, 1997, 2001) en seis volúmenes y dos ediciones, vols. 85 y 119 de "Advances in Chemical Physics".
- [8] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field" (World Scientific, 2001).
- [9] M. W. Evans y J.-P. Vigié, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, 1994 a 2002) en 10 volúmenes con encuadernación dura y blanda.
- [10] M. W. Evans y A. A. Hasanein, "The Photomagnetron in Quantum Field Theory" (World Scientific, 1994).
- [11] S. M. Carroll, "Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity" (Addison Wesley, Nueva York 2004 y en notas en la red).
- [12] D. Reed en la ref. (7), segunda edición, vol. 119(3).