DEMOSTRACIÓN DEFINITIVA 5 : IDENTIDAD DE CARTAN EVANS

Este es un ejemplo de la identidad dual de Cartan Bianchi, y se construye sencillamente tomando el dual de Hodge, término por término, a partir de los resultados obtenidos en la Demostración Definitiva 2. Le puse ese nombre para distinguirla de la identidad de Cartan Bianchi.

Demostración.

Consideremos la acción del conmutador de derivadas covariantes sobre el vector V^{ρ} en cualquier espaciotiempo:

$$[\, D_{\mu}\ ,\ D_{\nu}\,]\, V^{\rho} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}\, V^{\sigma} - T^{\lambda}_{\mu\nu}\, D_{\lambda} V^{\rho} \tag{1}$$

Tomamos el dual de Hodge término por término y los subíndices término por término para hallar:

$$[D_{\alpha}\ ,\ D_{\beta}]_{\mathbf{DH}}\, V^{\rho}\ := \tilde{R}^{\rho}_{\sigma\alpha\beta}\, V^{\sigma}\ - \tilde{T}^{\lambda}_{\alpha\beta}\, D_{\lambda}\, V^{\rho} \tag{2}$$

donde el tilde indica el dual de Hodge. En un espaciotiempo de cuatro dimensiones, el dual de Hodge de un tensor antisimétrico (es decir, un dos-forma diferencial) es otro dos-forma diferencial. Por ejemplo, los índices 01 se transforman en 23; de manera que el tensor resultante es un ejemplo del tensor original, pero con índices diferentes. Por definición:

$$\widetilde{T}^{\lambda}_{\alpha\beta} = (\, \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}\,)_{\mathbf{DH}} \tag{3}$$

y

$$\tilde{R}^{\rho}_{\sigma\alpha\beta} = (\, \partial_{\beta}\, \Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha} - \partial_{\sigma}\, \Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\rho}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda}\, \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha})_{\mathbf{DH}} \tag{4}$$

Una suma cíclica de las definiciones (4) resulta idénticamente igual a la misma suma cíclica de las definiciones de los mismos tensores. Este es un ejemplo de la identidad de Cartan Bianchi demostrada en la Demostración Definitiva 4. Por lo tanto, se deduce que:

$$D_{\mu}\, \widetilde{T}^{a}_{\sigma\rho} + D_{\rho}\, \widetilde{T}^{a}_{\mu\nu} + D_{\nu}\, \widetilde{T}^{a}_{\rho\mu}\ := \tilde{R}^{a}_{\mu\nu\rho} + \tilde{R}^{a}_{\rho\mu\nu} + \tilde{R}^{a}_{\nu\rho\mu} \tag{5}$$

que puede escribirse como la identidad dual de Cartan Evans :

$$D_{\mu} T^{a\mu\nu}\ :=\ R^{a\mu\nu}_{\mu} \tag{6}$$

En la variedad base, la ecuación (6) es:

$$D_\mu T^{\kappa\mu\nu} := R_\mu^{\kappa\mu\nu} \qquad (7)$$

y muestra que la derivada covariante de la torsión es una curvatura bien definida. La identidad original de Cartan Bianchi es:

$$D_\mu \tilde{T}^{\kappa\mu\nu} := \tilde{R}_\mu^{\kappa\mu\nu} \qquad (8)$$

y las ecuaciones (7) y (8) resultan invariantes bajo transformaciones de duales de Hodge.

Algunos detalles adicionales de la Demostración 5

La Identidad Dual

Esta es una demostración importante, ya que el error en la ecuación de campo de Einstein aparece en la identidad dual, en su expresión tensorial:

$$D_\mu T^{\kappa\mu\nu} := R_\mu^{\kappa\mu\nu} \qquad (1)$$

La no consideración de la torsión en el modelo establecido de la física significa que no se cumple con esta ecuación fundamental de la geometría. La demostración de la identidad dual depende del hecho que el dual de Hodge de una dos-forma en un espacio 4-D es otra dos-forma, con diferentes índices. Es así que el dual de Hodge del operador conmutador es:

$$[D^\alpha , D^\beta] = \tfrac{1}{2} \|g\|^{1/2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}[D_\mu , D_\nu] \qquad (2)$$

donde $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ es por definición el tensor unitario totalmente antisimétrico del espaciotiempo plano. Aquí, $\|g\|$ es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$ del espaciotiempo no plano. Es ésta una cuestión de definición o convención. Un ejemplo de la Ec. (2) es:

$$[D^0 , D^1] = \|g\|^{1/2} [D_2 , D_3] \qquad (3)$$

Donde hemos efectuado la sumatoria sobre los repetidos índices μ y ν en la Ec. (2). De manera que, aparte de un factor $\|g\|^{1/2}$ (un número) la transformación del dual de Hodge produce $[D^0 , D^1]$ a partir de $[D_2 , D_3]$. Los índices originales 2 y 3 se ven cambiados a 0 y 1.

Los índices de $[D^0 , D^1]$ se reducen a $[D_0 , D_1]$ de la siguiente manera:

$$[D_0 , D_1] = g_{00}\, g_{11} [D^0 , D^1] \qquad (4)$$

$$[D_0\ ,\ D_1] = g_{00}\ g_{11} \|g\|^{1/2} [D_2\ ,\ D_3] \tag{5}$$

Por lo tanto, $[D_0\ ,\ D_1]$ es $[D_2\ ,\ D_3]$ multiplicado por un número, $g_{00}\ g_{11} \|g\|^{1/2}$.
Tanto $[D_0\ ,\ D_1]$ como $[D_2\ ,\ D_3]$ son ejemplos de $[D_\mu\ ,\ D_\nu]$, respectivamente, con

$$\mu = 0\ ,\quad \nu = 1 \tag{6}$$

y

$$\mu = 2\ ,\quad \nu = 3 \tag{7}$$

Se obtiene el cumplimiento de lo siguiente. Si

$$[D_2\ ,\ D_3]\, V^\rho = R^\rho_{\sigma 23}\ V^\sigma - T^\lambda_{23} D_\lambda V^\rho \tag{8}$$

entonces:

$$[D_0\ ,\ D_1]\, V^\rho = R^\rho_{\sigma 01}\ V^\sigma - T^\lambda_{01} D_\lambda V^\rho \tag{9}$$

porque $g_{00}\ g_{11} \|g\|^{1/2}$ se cancela. Las Ecs. (8) y (9) son ambas ejemplos de

$$[D_\mu\ ,\ D_\nu]\, V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu}\ V^\sigma - T^\lambda_{\mu\nu} D_\lambda V^\rho \tag{10}$$

Puede demostrarse que la Ec. (10) implica la Ec. (1).

Q.E.D.

<u>Ejemplo</u>

Si la entidad original es para:

$$\nu = 3 \tag{11}$$

Entonces la identidad dual es para:

$$\nu = 1 \tag{12}$$

A partir de la Ec.(1) y (11) la identidad original es:

$$D_\mu\ T^{\kappa\mu 3} := R^{\kappa\mu 3}_\mu \tag{13}$$

O sea, $D_0\, T^{\kappa 03} + D_1\, T^{\kappa 13} + D_2\, T^{\kappa 23} = R_0^{\kappa 03} + R_1^{\kappa 13} + R_2^{\kappa 23}$ (14)

A partir de las Ecs.(1) y (12) la identidad dual es:

$$D_\mu\, T^{\kappa\mu 1} := R_\mu^{\kappa\mu 1} \tag{15}$$

o sea $D_0\, T^{\kappa 01} + D_2\, T^{\kappa 21} + D_3\, T^{\kappa 31} = R_0^{\kappa 01} + R_2^{\kappa 21} + R_3^{\kappa 31}$ (16)

El algebra computacional nos muestra que la ecuación de campo de Einstein no cumple con ambas ecuaciones (14) y (16) como debiera.

Más detalles de la Demostración Cinco

La dual de Hodge dual del conmutador se define mediante:

$$[D^\alpha\ ,\ D^\beta\ ] = \tfrac{1}{2}\, \|g\|^{1/2}\ \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}[D_\mu,\ D_\nu\ ] \tag{1}$$

y hay una doble sumatoria sobre μ y ν. El tensor unitario antisimétrico se define mediante:

$$\epsilon^{0123} = -\ \epsilon^{0132} = 1 \tag{2}$$

etcétera. De manera que, por ejemplo:

$$[D^0\ ,\ D^1\ ] = \tfrac{1}{2}\, \|g\|^{1/2}\ (\epsilon^{0123}[D_2\ ,\ D_3\ ] + \epsilon^{0132}[D_3\ ,\ D_2\ ]\ ) \tag{3}$$

donde usamos: $[D_3\ ,\ D_2\ ] = -\ [D_2\ ,\ D_3\ ]$ (4)

para hallar: $[D^0\ ,\ D^1\ ] = \|g\|^{1/2}[D_2\ ,\ D_3\ ]$ (5)

El factor $\|g\|^{1/2}$ es un número. Es la raíz cuadrada del valor positivo de $|\ g\ |$, que denota el determinante de la métrica:

$$|\ g\ | = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \tag{6}$$

La regla general para la reducción de índices de un tensor de rango dos u operador tensorial es:

$$[D_\mu \ , D_\nu \ ] \ = \ g_{\mu\alpha} \ g_{\nu\beta} \ [D^\alpha \ , D^\beta \ ] \tag{7}$$

Es decir, se aplica la métrica en dos ocasiones para reducir los índices.

Consideremos el ejemplo:

$$\mu = 0 \ , \ \nu = 1 \ , \ \alpha = 0 \ , \beta = 1 \tag{8}$$

Por lo tanto:

$$[D_0 \ , D_1 \ ] \ = g_{00} \ g_{11} \ [D^0 \ , D^1 \ ]$$

$$[D_0 \ , D_1 \ ] \ = g_{00} \ g_{11} \ \|g\|^{1/2} [D_2 \ , D_3 \ ] \tag{9}$$

Análogamente:

$$R^{\rho}_{\sigma 01} \ = g_{00} \ g_{11} \ \|g\|^{1/2} \ R^{\rho}_{\sigma 23} \tag{10}$$

$$T^{\lambda}_{01} \ = g_{00} \ g_{11} \ \|g\|^{1/2} \ T^{\lambda}_{23} \tag{11}$$

Se comprueba que las cantidades transformadas de Hodge constituyen ejemplos de las cantidades originales, pero con los índices 23 transformados a índices 01. El resultado se resume en el siguiente diagrama de flujo:

Diagrama de Flujo I de la Demostración 5

$$[D_2\ ,\ D_3\ ]\ V^{\rho} = R^{\rho}_{\sigma 23}\ V^{\sigma} - T^{\lambda}_{23}\ D_{\lambda}\ V^{\rho} \qquad \text{I}$$

$$\downarrow$$

$$g_{00}\ g_{11}\ \|\mathrm{g}\|^{1/2}\ [D_2\ ,\ D_3\ ]\ V^{\rho} = g_{00}\ g_{11}\ \|\mathrm{g}\|^{1/2}\ (R^{\rho}_{\sigma 23}\ V^{\sigma} - T^{\lambda}_{23}\ D_{\lambda}\ V^{\rho})$$

$$\downarrow$$

$$[D_0\ ,\ D_1\ ]\ V^{\rho} = R^{\rho}_{\sigma 01}\ V^{\sigma} - T^{\lambda}_{01}\ D_{\lambda}\ V^{\rho} \qquad \text{II}$$

I = Original   II = Dual de Hodge

Ambos son ejemplos de:

$$[D_{\mu}\ ,\ D_{\nu}\ ]\ V^{\rho} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}\ V^{\sigma} - T^{\lambda}_{\mu\nu}\ D_{\lambda}\ V^{\rho}$$

$$\downarrow$$

$$D_{\mu}\ T^{\kappa\mu\nu} := R^{\kappa\mu\nu}_{\mu},$$

$$D_{\mu}\ \tilde{T}^{\kappa\mu\nu} := \tilde{R}^{\kappa\mu\nu}_{\mu}$$

Diagrama de Flujo II de la Demostración 5

Toda dos-forma en 4 dimensiones es ella misma el dual de Hodge de otra dos-forma.

↓

Toda dos-forma en 4 dimensiones puede expresarse con un tilde encima, donde el tilde denota "dual de Hodge".

↓

Si $D \wedge T := R \wedge \mathrm{q}$

entonces $D \wedge \tilde{T} := \tilde{R} \wedge \mathrm{q}$

↓

$$D_\mu \, \tilde{T}^{\kappa\mu\nu} := \tilde{R}_\mu^{\kappa\mu\nu}$$

$$D_\mu \, T^{\kappa\mu\nu} := R_\mu^{\kappa\mu\nu}$$

↓

$R_\mu^{\kappa\mu\nu}$ puede calcularse a partir de la Ecuación de Campo de Einstein.

↓

En general, $R_\mu^{\kappa\mu\nu}$ es distinto de cero, falla la ecuación de Einstein.