DEMOSTRACIÓN DEFINITIVA 3: EL POSTULADO DE LA TÉTRADA.

El postulado de la tétrada es el nombre que recibe la ecuación que resulta del requisito fundamental de que la totalidad del campo vectorial sea independiente de sus componentes y elementos base. Sin esta propiedad matemática, la física se tornaría inconcebible, ya que, por ejemplo, un campo vectorial en espacio tridimensional en coordenadas cartesianas no resultaría ser el mismo si se le expresase en coordenadas esféricas polares. Cada una de las demostraciones en geometría de Cartan se respalda en el postulado de la tétrada, el cual se introdujo en 1925 o antes, y que se ha enseñado desde entonces. La teoría ECE utiliza este postulado establecido de la tétrada.

<u>Demostración.</u>

Consideremos la derivada covariante de la geometría de Riemann:

$$D_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \tag{1}$$

y expresemos esta derivada covariante en un espaciotiempo rotulado con índices en caracteres latinos. Esto fue introducido por Cartan como el espaciotiempo de Minkowski tangente a la variedad (manifold) base en el punto P, pero se ha generalizado en la teoría ECE para describir el espín. La tétrada se define como:

$$V^a = q^a_\mu V^\mu \tag{2}$$

y la derivada covariante deviene:

$$D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + w^a_{\mu b} V^b \tag{3}$$

donde $w^a_{\mu b}$ es la conexión de espín. Pueden utilizarse cualesquier elementos base con el índice a, de manera que esto introduce una ventaja con respecto a la geometría de Riemann, cuyos elementos base son ∂_μ. El campo vectorial completo es el mismo, de manera que:

$$D\, V = D_\mu V^\nu \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\nu = D_\mu V^a \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \hat{q}_a \tag{4}$$

donde vienen dados los componentes y elementos base del campo vectorial. Los elementos base y los componentes se relacionan a través de ecuaciones similares a la ecuación (2).

$$\hat{q}_a = q^\sigma_a \, \partial_\sigma \tag{5}$$

y

$$V^a = q^a_\nu \, V^\nu \tag{6}$$

Por lo tanto, la ecuación (4) puede expandirse como:

$$D\,V = (\partial_\mu \, (q^a_\nu \, V^\nu) + w^a_{\mu b} q^b_\lambda \, V^\lambda) \, \mathrm{d}x^\mu \otimes (q^\sigma_a \partial_\sigma) \tag{7}$$

Ahora utilizamos la propiedad conmutativa de las matrices para re expresar la ecuación (7):

$$D\,V = q^\sigma_a \, (\partial_\mu (q^a_\nu V^\nu) + w^a_{\mu b} q^b_\lambda V^\lambda) \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\sigma \tag{8}$$

Los índices ficticios σ ahora se vuelven a rotular como ν para dar:

$$D\,V = q^\nu_a \, (q^a_\nu \, \partial_\mu V^\nu + V^\nu \partial_\mu q^a_\nu + w^a_{\mu b} q^b_\lambda V^\lambda \,) \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\nu \tag{9}$$

La convención de Cartan es que q^σ_a se define como la inversa de q^a_σ , de manera que:

$$q^\sigma_a \, . \, q^a_\sigma \, = 1 \tag{10}$$

de manera que la ecuación (9) deviene:

$$D\,V = (\, \partial_\mu V^\nu + q^\nu_a \partial_\mu q^a_\nu V^\nu + q^\nu_a w^a_{\mu b} q^b_\lambda V^\lambda) \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\nu \tag{11}$$

Los índices ficticios ν en el segundo término del lado derecho se vuelven a rotular como λ para dar:

$$D\,V = (\, \partial_\mu V^\nu + q^\nu_a (\partial_\mu q^a_\lambda \, + w^a_{\mu b} q^b_\lambda) V^\lambda) \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\nu \tag{12}$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (1) se obtiene:

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = q^\nu_a (\partial_\mu q^a_\lambda \, + w^a_{\mu b} q^b_\lambda) \tag{13}$$

y utilizando la ecuación (10) obtenemos el postulado de la tétrada, que era lo que se buscaba demostrar:

$$D_\mu \, q^a_\lambda = \partial_\mu q^a_\lambda \, + w^a_{\mu b} q^b_\lambda - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} q^a_\nu \, = 0 \tag{14}$$

en donde la derivada covariante actúa sobre un tensor de rango dos de índice mixto, la tétrada.