

DEMOSTRACION DEFINITIVA 1: ANTISIMETRÍA DE LA CONEXIÓN.

En esta demostración definitiva se obtiene la antisimetría de la conexión, y se muestran las consecuencias que se derivan para el modelo tradicional de la física. Por definición, el conmutador de derivadas covariantes es asimétrico en sus índices.

$$[D_\mu, D_\nu] = - [D_\nu, D_\mu] = D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu \quad (1)$$

Entonces:

$$[D_\mu, D_\nu] = \hat{O} \quad \text{si} \quad \mu = \nu \quad (2)$$

Su acción sobre el vector V^ρ en cualquier dimensión y en cualquier espaciotiempo es:

$$[D_\mu, D_\nu] V^\rho = R_{\sigma\mu\nu}^\rho V^\sigma - T_{\mu\nu}^\lambda D_\lambda V^\rho \quad (3)$$

donde el tensor de torsión es:

$$T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (4)$$

A partir de la antisimetría del conmutador (ec. (1)):

$$T_{\mu\nu}^\lambda = - T_{\nu\mu}^\lambda \quad (5)$$

Se deduce que la conexión no puede ser simétrica. En general podría ser asimétrica, o sea que contiene partes simétricas y antisimétricas. Sin embargo, demostraremos aquí la imposibilidad de la existencia de partes simétricas. Utilizando la ec.(4) podemos insertar directamente la conexión dentro de la ec.(3):

$$[D_\mu, D_\nu] V^\rho = - \Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda D_\lambda V^\rho + \dots \quad (6)$$

Del lado izquierdo de la igualdad tenemos un conmutador que es totalmente antisimétrico, de manera que esta propiedad también se cumple para el conmutador de $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. La simetría de ambos lados debe ser la misma. Antisimetría total significa:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (7)$$

La conexión a partir de la ec.(3) es antisimétrica. Q.E.D.

A continuación se mencionan las consecuencias para el modelo tradicional de la física. El error fundamental y catastrófico en el modelo tradicional del siglo XX fue el afirmar que la torsión era igual a cero. A partir de la ec.(4) ello significa que se supuso incorrectamente que la conexión era simétrica, para facilitar los cálculos. A partir de la ec.(2) esto significa en el caso de $\mu=\nu$:

$$\hat{O} V^{\rho} = 0 V^{\sigma} - 0 D_{\lambda} V^{\rho} \quad (8)$$

Con un operador nulo \hat{O} donde:

$$V^{\rho} \neq 0 \quad , \quad D_{\lambda} V^{\rho} \neq 0 \quad (9)$$

Si se supone que la torsión es cero para índices arbitrarios, resulta a partir de las condiciones de simetría antes mencionados que el conmutador es también igual a cero.

$$\hat{O} V^{\rho} = R_{\sigma\mu\rho}^{\rho} V^{\sigma} - 0 D_{\lambda} V^{\rho} \quad (10)$$

En consecuencia, la curvatura debe de desaparecer también, lo cual implica que no hay campo gravitacional, reductio ad absurdum. El resultado es que una conexión simétrica resulta incompatible con el conmutador, por lo tanto no es posible “despreciar” la torsión, y el modelo tradicional resulta inconsistente, Q.E.D.

Algunos comentarios acerca de la Demostración 1.

A continuación se ofrecen algunas explicaciones adicionales, con el objeto de aclarar las demostraciones anteriores. Los siguientes diagramas subrayan la ubicación de los índices antisimétricos. En el primer diagrama se determina la antisimetría de la conexión mediante el primer término a la derecha. En el segundo diagrama se presenta la ecuación incorrecta del modelo tradicional. Puede verse que en el modelo tradicional solo puede determinarse la antisimetría del tensor de Riemann en sus dos últimos índices, y nada existe para determinar la correcta antisimetría de la conexión.

$$\begin{aligned}
 [D_{\mu}, D_{\nu}] V^{\rho} &= (D_{\mu} D_{\nu} - D_{\nu} D_{\mu}) \cdot V^{\rho} \\
 \uparrow \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 &= - (\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}) D_{\lambda} V^{\rho} + (\partial_{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}) \cdot V^{\sigma} \quad (I) \\
 \uparrow \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \uparrow
 \end{aligned}$$

$$[D_\mu, D_\nu] V^\rho = ? \left(\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \right) \cdot V^\sigma \quad (\text{II})$$

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow \quad \uparrow & & \uparrow \quad \uparrow & & \uparrow \quad \uparrow & & \uparrow \quad \uparrow & & \uparrow \quad \uparrow \end{array}$$

Para cada conexión que aparece en el tensor de curvatura:

$$[D_\mu, D_\nu] V^\rho = - T_{\mu\nu}^\lambda D_\lambda V^\rho + \dots ; \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$$

$$[D_\mu, D_\sigma] V^\rho = - T_{\mu\sigma}^\lambda D_\lambda V^\rho + \dots ; \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda = - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda$$

$$[D_\nu, D_\sigma] V^\rho = - T_{\nu\sigma}^\lambda D_\lambda V^\rho + \dots ; \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda = - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda$$

$$[D_\mu, D_\lambda] V^\rho = - T_{\mu\lambda}^\kappa D_\kappa V^\rho + \dots ; \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa = - \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa$$

Todas las conexiones son antisimétricas. Si cualquiera fuese simétrica, desaparecería el conmutador, y tanto la torsión como la curvatura serían iguales a cero. Análogamente:

$$[D_\rho, D_\sigma] X_{v_1 \dots v_1}^{\mu_1 \dots \mu_k} = - T_{\rho\sigma}^\lambda D_\lambda X_{v_1 \dots v_1}^{\mu_1 \dots \mu_k} + \dots$$

donde X es el tensor de cualquier rango.

Algunos detalles adicionales de la Demostración 1.

La ecuación clave de la demostración 1 comienza con:

$$[D_\mu, D_\nu] V^\rho = R_{\sigma\mu\nu}^\rho V^\sigma - T_{\mu\nu}^\lambda D_\lambda V^\rho \quad (1)$$

donde:
$$T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (2)$$

Existe una correspondencia uno a uno entre la antisimetría del conmutador y aquella de la torsión:

$$[D_\mu, D_\nu] V^\rho = - T_{\mu\nu}^\lambda D_\lambda V^\rho + R_{\sigma\mu\nu}^\rho V^\sigma \quad (3)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow \quad \uparrow & & \uparrow \quad \uparrow \end{array}$$

Si:
$$\mu = \nu \quad (4)$$

Entonces: $[D_\mu, D_\nu] = \hat{O}$ (5)

Por ejemplo: $[D_1, D_1] = D_1 D_1 - D_1 D_1 = \hat{O}$ (6)

y $T_{11}^\lambda = 0$ (7)

de manera que:

$$[D_1, D_1] V^\rho = - T_{11}^\lambda D_\lambda V^\rho + (\partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\rho - \partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\rho + \Gamma_{1\lambda}^\rho \Gamma_{1\sigma}^\lambda - \Gamma_{1\lambda}^\rho \Gamma_{1\sigma}^\lambda) \cdot V^\sigma$$

↓

$$0 V^\rho = - 0 D_\lambda V^\rho + (\partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\rho - \partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\rho + \Gamma_{1\lambda}^\rho \Gamma_{1\sigma}^\lambda - \Gamma_{1\lambda}^\rho \Gamma_{1\sigma}^\lambda) \cdot V^\sigma$$

o sea $0 = 0 + (\partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\rho - \partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\rho + \Gamma_{1\lambda}^\rho \Gamma_{1\sigma}^\lambda - \Gamma_{1\lambda}^\rho \Gamma_{1\sigma}^\lambda) \cdot V^\sigma$

Así que: $(\partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\rho - \partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\rho + \Gamma_{1\lambda}^\rho \Gamma_{1\sigma}^\lambda - \Gamma_{1\lambda}^\rho \Gamma_{1\sigma}^\lambda) \cdot V^\sigma = 0$ (8)

Sin embargo: $V^\sigma \neq 0$ (9)

O sea que: $(\partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\rho - \partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\rho + \Gamma_{1\lambda}^\rho \Gamma_{1\sigma}^\lambda - \Gamma_{1\lambda}^\rho \Gamma_{1\sigma}^\lambda) = 0$ (10)

El tensor de Riemann es cero, sea cual fuese cualquier simetría de conexión. Sabemos a partir de la ec.(11) que para $\mu=v$ la simetría de la conexión debe ser simétrica, pero el tensor de curvatura completo es cero.

Conclusión: Para una conexión simétrica el tensor de curvatura y el tensor de torsión son iguales a cero.

Comentario acerca de la antisimetría de los operadores

Supongamos que A y B sean dos operadores. Entonces el conmutador de ambos es:

$$[A, B] = AB - BA$$

En el caso de que A=B tenemos:

$$[A, A] = AA - AA = 0$$

No existe tal cosa como la “parte simétrica” en un operador. Por lo tanto, la antisimetría significa antisimetría exclusiva.

Diagrama de Flujo 1

Modelo Tradicional

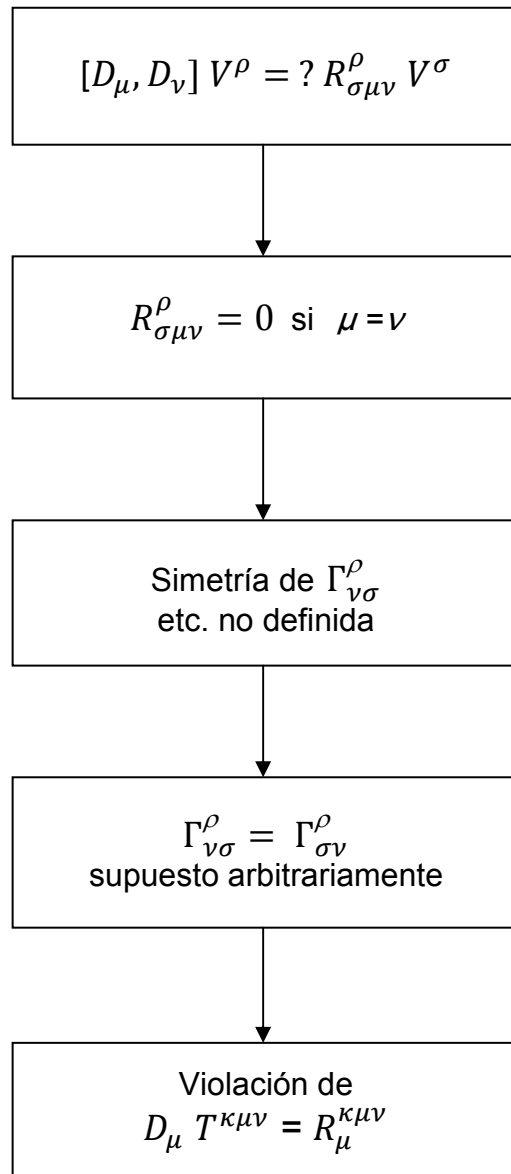


Diagrama de Flujo 2

Conexión

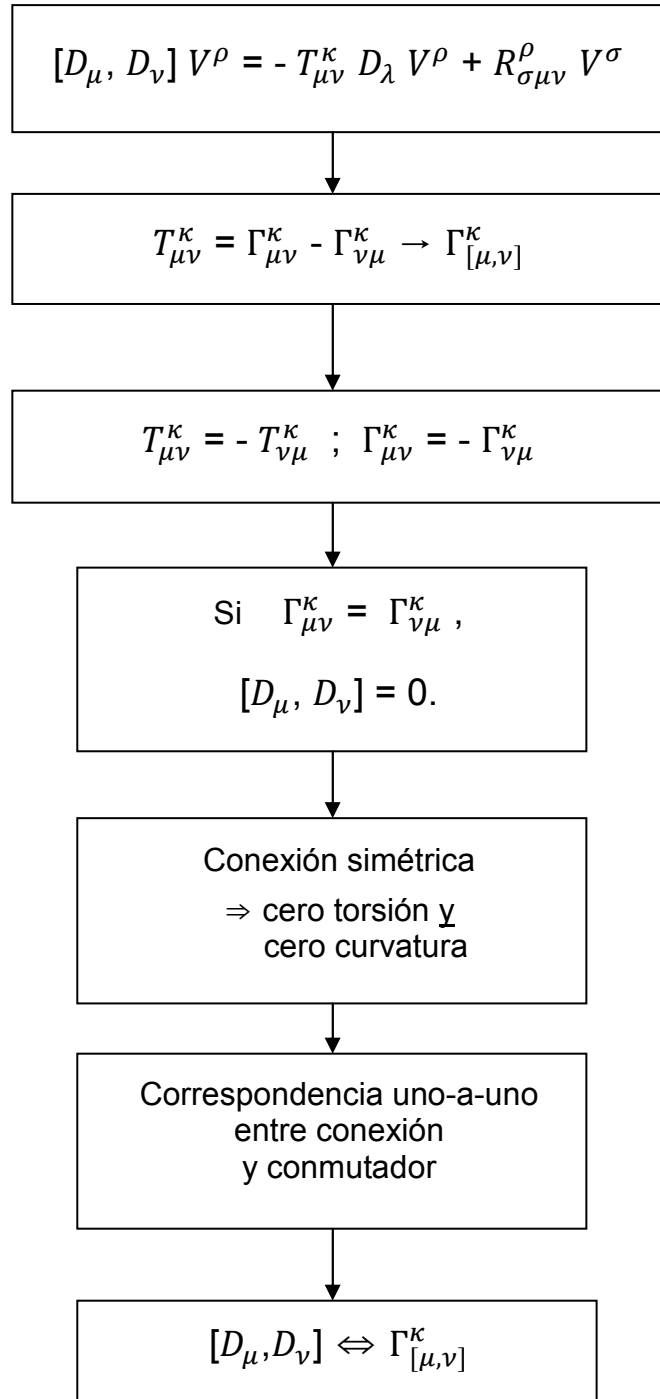


Diagrama de Flujo 3

Conmutador y simetría

